

軸対称荷重を受ける円筒の任意位置環状き裂の
応力拡大係数簡易評価*飯 井 俊 行^{*1}, 渡 邊 勝 彦^{*1}A Simplified Evaluation Method of the Stress Intensity Factor
of a Circumferential Crack in a Cylinder
Subjected to Axisymmetric Loads

Toshiyuki MESHII and Katsuhiko WATANABE

A simplified method to approximately evaluate the stress intensity factor of an arbitrarily located circumferential crack in a cylinder subjected to axisymmetric loads was theoretically derived, based on the theory of cylindrical shell and compliance. Axisymmetric radial and bending loads on the edge of the cylinder are considered as axisymmetric loads, and the effects of the cylinder length and the crack position on the stress intensity factor can be evaluated by applying the method. The validity of the method was confirmed by comparing the stress intensity factor by the method with those derived by FEM, for the case where the bending loads of the same value are applied on both ends. From the results, it was shown that the stress intensity factor increases as the cylinder length decreases, and as the crack gets near the cylinder edge. These results warn us to pay attention on the effects of cylinder length and crack location, when we evaluate the stress intensity factor of cylinders with circumferential crack, under axisymmetric bending.

Key Words: Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Axisymmetric Loads, Cylindrical Shell

1. 結 言

圧力容器のき裂を扱うにあたっての基本の一つとなる、円筒環状き裂の応力拡大係数(K値)はこれまでも計算され、ハンドブック等の形でデータが蓄積されている⁽¹⁾。しかし、これらにおいては円筒長さの影響については記述がなく、無限円筒に対する結果が記載されるのが一般的である。これに対し、最近筆者らはき裂が円筒長さの中央位置にある場合につき、軸対称曲げ下円筒の環状き裂のK値について検討し、その値が円筒長さの影響を強く受けることを報告すると共に、この影響も含めて評価可能な当該K値の簡易評価式を導いた⁽²⁾。

ところで、実際の構造物としての円筒においてはその長さが有限であるとともに、生じるき裂はその軸方向中央位置にあるとは限らない。従って円筒中き裂のK値評価にあたってはそれらの影響を定量的に評価できるようになることは実用上重要であると思われる。

そこで、本論文ではこれら有限長、き裂の位置の影響を含み、実用上十分な精度をもって所用のK値を評価す

る簡易評価法を提示する。具体的には、はじめに簡易評価法を提示するにあたっての理論的側面における着眼点、基本的考え方についてまとめ、続いて、これに則り、端部に軸対称荷重を受ける円筒中における任意位置にある環状き裂のK値簡易評価法の一般的定式化を行う。最後に両端部に等しい曲げ荷重のみが作用する場合について有限要素法による解との比較を行い、本方法による解の精度を確認する。さらにこれらの解を通じて、円筒長さ、き裂位置のK値に与える基本的な性質を明らかにする。なおき裂が中央位置にある場合の先の研究⁽²⁾においては荷重として曲げ荷重のみを考えたが、本論文では、荷重についても、端部に働く軸対称半径方向荷重も考慮した形に拡張されている。

2. 着眼点と考え方

ここでは目標とするK値簡易評価法を導くにあたっての着眼点、基本的な考え方について述べる。

まず「軸対称荷重を受ける薄肉円筒の問題は弾性支持梁の問題として扱うことができる」という事実がある。具体的には、図1左に示す端部で周方向単位長さ当り P_1 、 P_2 の軸対称半径方向荷重、 M_1 、 M_2 の軸対称曲げ荷

* 原稿受付 1997年3月31日。

*¹ 正員、東京大学生産技術研究所(〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

重を受ける円筒の問題は、弾性支持梁問題の支配方程式とのアナログより、弾性支持梁が端部で単位厚さ当りの横荷重 P_1 、 P_2 、および曲げ荷重 M_1 、 M_2 を受ける図 1 右の問題に置き換えられる⁽³⁾。ただしこのときの弾性支持梁のパネ定数 k は、形式的に曲げ剛性 EI を $D = EW^3/12(1-\nu^2)$ とし、次式により求められるものである。

$$k = 4\beta^4 D; \quad \beta^4 = \frac{EW}{4R_m^2 D} \quad (1)$$

ここに、 R_m ：平均半径、 W ：肉厚、 E ：ヤング率、 ν ：ポアソン比、である。 β は長さの逆数の次元を有する。なお、上の置き換えにあたって梁は矩形断面のものであり、横荷重と弾性支持の方向はその慣性主軸の一つと一致し、曲げ荷重はそのベクトルがいま一つの慣性主軸と一致するように作用している場合を考えており、以下梁を考える場合にはすべて同様である。

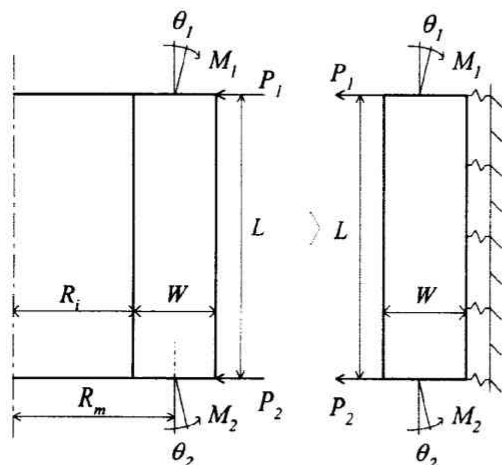


Fig. 1 Replacement of a cylindrical shell under axisymmetric loads by a beam on an elastic foundation

次に「何らかの方法で支持された片側き裂を有する梁が任意の横荷重と端部における曲げ荷重を受けるとき、その変形は、近似的に二本の梁がき裂部で長さのない適切なコンプライアンス（パネ定数の逆数）を有する回転パネで接続された問題として扱うことができる」ということに注目する。これは図 2 のような置き換えが（図のように弾性支持されている必要はない）成り立つということであるが、次のように考えられる。

図 3 に示すような純曲げを受ける単位厚さの片側き裂梁を考える。このときき裂断面より $l/2$ だけ離れた断面に

においてモーメント M と回転角 θ の間にはコンプライアンスを λ として

$$\theta = \lambda \cdot M = (\lambda_0 + \Delta\lambda) \cdot M = \theta_0 + \Delta\theta \quad (2)$$

$$\theta_0 = \lambda_0 \cdot M, \quad \Delta\theta = \Delta\lambda \cdot M \quad (3)$$

なる関係が成り立つ。ここで λ_0 、 θ_0 はそれぞれき裂が存在しないときのコンプライアンスと当該断面回転角、 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\theta$ はき裂が入ることによるそれらの増分である。さてここで $\Delta\theta$ であるが、き裂から離れたところではき裂が入ることにより剛体的な回転が生じるだけであることを考慮すると、これは大部分き裂近傍断面での回転の増分の反映として考えることができる。従ってき裂断面 ($l=0$) では $\theta_0=0$ であることも考慮すると、き裂の存在による変形に対する効果は、き裂を、純曲げを受ける無限長片側き裂梁におけるコンプライアンスの増分として与えられる $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda = a/W$, W には依存するが、 l には依存しない) をコンプライアンスとして有する回転パネで置き換えることにより近似的に扱えることになる。そしてこのように考えるとき、任意の横荷重と端部での曲げ荷重を受ける梁においては長手方向に分布する曲げモーメントを生じるが、き裂を含む近傍でこのモーメントの値の符号が変化せず、その最大値と最小値の差が絶対値において最小値に比べて十分小さいという条件が成り立つとき、第一近似的にき裂の存在は $\Delta\lambda$ のコンプライアンスを有するパネで扱えるものと考えられることとなる^{(4),(5)}。

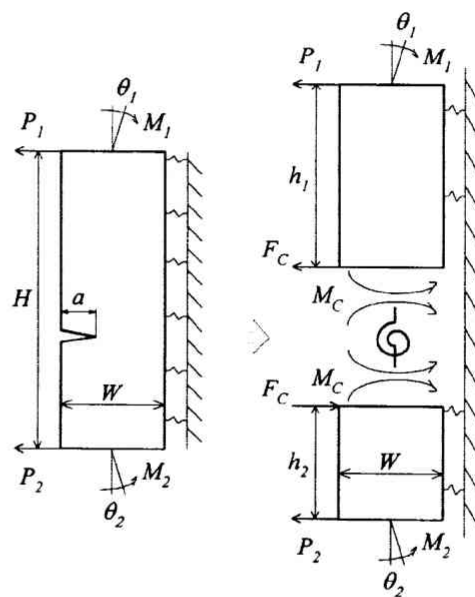


Fig. 2 Replacement of the cracked part by a spring

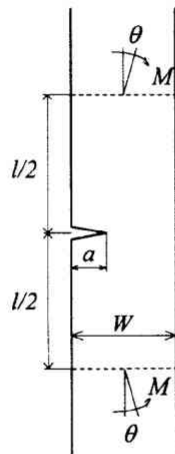


Fig. 3 Cracked beam under pure bending

ここで述べたのは任意の横荷重と端部における曲げ荷重を受ける片側き裂梁の変形についてであるが、K値については、次のように考えられる。

上のようなバネによる置き換えを行うとき、考える問題におけるバネ部に生じるモーメントが求まる。そして、その置き換えが妥当と判断される上述の条件の下では、その値はバネに置き換える前のき裂の状態において、 $l/2$ が小さい断面において (図3参照) 生じるモーメントにほぼ近いものになると考えられる。従って「長手方向に分布する曲げモーメントを生じるような荷重を受ける片側き裂梁のK値は、バネ部に生じる曲げモーメントとして評価された値がき裂断面に近い断面に曲げモーメントとして作用する場合の、すなわち結局は片側き裂梁がその値の純曲げを受ける場合のK値によって近似的に与えられる」と考えられることになる。

以上述べてきた三つの着眼点を組み合わせるとき、本論文で対象とするのは図4に示すような環状き裂を有する円筒が端部で半径方向荷重と曲げ荷重を受ける場合のK値であるが、それは、図2の弾性支持された二つの梁を回転バネで接続したモデルに置き換えて長手方向のモーメント分布を求め、バネ部のモーメントに等しい曲げ荷重が働く純曲げ下の片側き裂梁のK値として近似的に求まることになる。

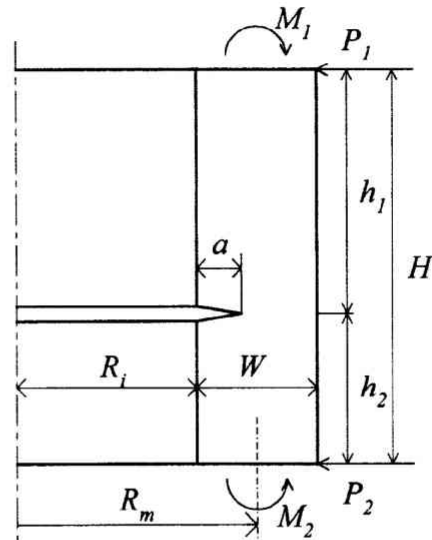


Fig. 4 A cylinder with a circumferential crack under axisymmetric loads

3. 円筒中環状き裂のK値簡易評価

ここでは2章の考え方に従い、検討対象問題を弾性支持梁の問題におきかえ、所用のK値を簡易評価する方法を具体的に示す。

3・1 弾性支持梁の荷重と変形 まず、基本となる長さ h の弾性支持梁の左端に荷重 P 、 M を単独で受ける図5(a)の場合を考える。このとき、左端 A から x 、右端 B から x' の位置 X における荷重 P による変位 y と回転角 θ に関するコンプライアンス λ_{yP} 、 $\lambda_{\theta P}$ が、また荷重 M による y 、 θ に関するコンプライアンス λ_{yM} 、 $\lambda_{\theta M}$ がそれぞれ定義される。従って、荷重 P 、 M が同時に作用するときの y 、 θ は、

$$\begin{bmatrix} y(x, x') \\ \theta(x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{yP}(x, x') & \lambda_{yM}(x, x') \\ \lambda_{\theta P}(x, x') & \lambda_{\theta M}(x, x') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \equiv \Lambda(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (4)$$

によって与えられる。ここで $\Lambda(x, x')$ は式(4)によって定義されるコンプライアンス行列である。行列の個々の成分については Hetényi の解⁽⁶⁾を2章冒頭に述べたように円筒用書き換え、次式を得る。

$$\lambda_{yP}(x, x') = \frac{1}{2\beta^3 D} \times \frac{\sinh \beta h \cos \beta x \cosh \beta x' - \sin \beta h \cosh \beta x \cos \beta x'}{\sinh^2 \beta h - \sin^2 \beta h} \quad (5)$$

$$\lambda_{\theta P}(x, x') = -\frac{1}{2\beta^2 D} \times \frac{1}{\sinh^2 \beta h - \sin^2 \beta h} \times$$

$$[\sinh \beta h \{ \sin \beta x \cosh \beta x' + \cos \beta x \sinh \beta x' \} \quad (6)$$

$$+ \sin \beta h \{ \sinh \beta x \cos \beta x' + \cosh \beta x \sin \beta x' \}]$$

$$\lambda_{yM}(x, x') = \frac{1}{2\beta^2 D} \times \frac{1}{\sinh^2 \beta h - \sin^2 \beta h} \times$$

$$[\sinh \beta h \{ \sin \beta x \cosh \beta x' - \cos \beta x \sinh \beta x' \} \quad (7)$$

$$+ \sin \beta h \{ \sinh \beta x \cos \beta x' - \cosh \beta x \sin \beta x' \}]$$

$$\lambda_{\theta M}(x, x') = \frac{1}{\beta D}$$

$$\times \frac{\sinh \beta h \cos \beta x \cosh \beta x' + \sin \beta h \cosh \beta x \cos \beta x'}{\sinh^2 \beta h - \sin^2 \beta h} \quad (8)$$

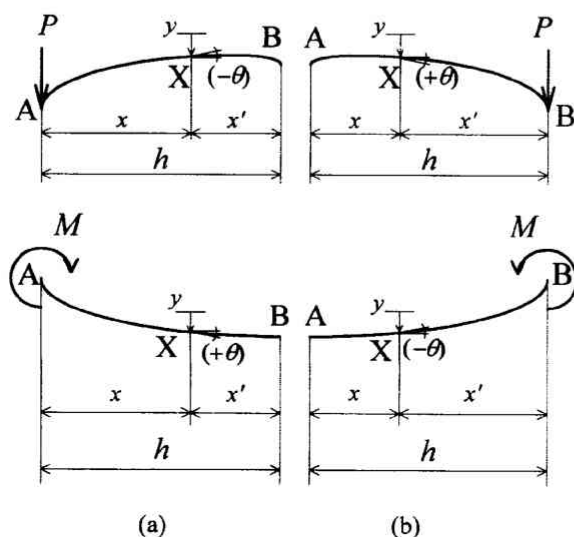


Fig. 5 A beam on an elastic foundation loaded on one end

次に荷重を右端に受ける場合（図 5 (b)）についても同様にコンプライアンス成分を定義し、コンプライアンス行列 $\Lambda(x, x')$ を次式により定義する。この場合にも、 x は左端からの距離を、 x' は右端からの距離を示すとする。

$$\begin{bmatrix} y(x, x') \\ \theta(x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{yP}^*(x, x') & \lambda_{yM}^*(x, x') \\ \lambda_{\theta P}^*(x, x') & \lambda_{\theta M}^*(x, x') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\equiv \Lambda^*(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}$$

この $\Lambda^*(x, x')$ については、荷重位置の対称性を考慮すると、容易に次の関係が求まる。

$$\begin{bmatrix} \lambda_{yP}^*(x, x') & \lambda_{yM}^*(x, x') \\ \lambda_{\theta P}^*(x, x') & \lambda_{\theta M}^*(x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{yP}(x', x) & \lambda_{yM}(x', x) \\ -\lambda_{\theta P}(x', x) & -\lambda_{\theta M}(x', x) \end{bmatrix} \quad (10)$$

以上に定義した諸量を用いると、両端に任意の横荷重・曲げ荷重を受ける長さ H の弾性支持梁の左端より x (右端より x') の位置 X における変位 y 、回転角 θ は次のように簡潔に表せる（図 6）。

$$\begin{bmatrix} y(x, x') \\ \theta(x, x') \end{bmatrix} = \Lambda(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \end{bmatrix} + \Lambda^*(x, x') \cdot \begin{bmatrix} P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

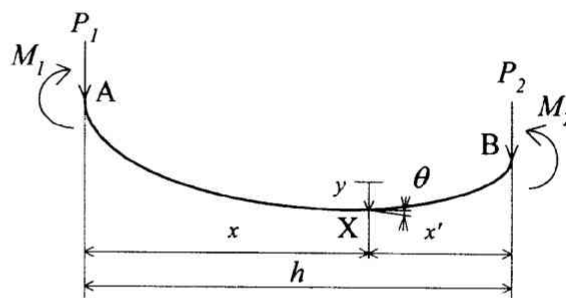


Fig. 6 A beam on an elastic foundation with loads on both ends

次に、対象としている図 2 右の「二本の弾性支持梁が長さのない適切なコンプライアンスを有する回転バネで接続される問題」について考える。このとき、き裂相当位置における境界条件について考えると、この問題は「二本の弾性支持梁が接続部で変位の食い違いは許されず、回転角の食い違いが許される問題」となる。さてここでバネの位置を C 点、 C 点に働くせん断力を F_C 、曲げモーメントを M_C とし、バネをはさんでの両側をそれぞれ図 7 に示すような荷重を受ける二つの梁 AC 、 CB に分けて考える。このとき C 点における変位、回転角は、梁 AC については式(11)において、 $h = h_1$ 、 $x = h_1$ 、 $x' = 0$ とおくことにより、また梁 CB については $h = h_2$ 、 $x = 0$ 、 $x' = h_2$ とおくことにより次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} y_C \\ \theta_{C1} \end{bmatrix} = \Lambda(h_1, 0) \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \end{bmatrix} + \Lambda^*(h_1, 0) \cdot \begin{bmatrix} F_C \\ M_C \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} y_C \\ \theta_{C2} \end{bmatrix} = \Lambda(0, h_2) \cdot \begin{bmatrix} -F_C \\ M_C \end{bmatrix} + \Lambda^*(0, h_2) \cdot \begin{bmatrix} P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

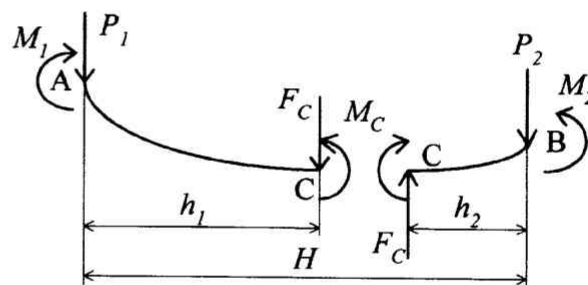


Fig. 7 A cracked beam on an elastic foundation with loads on both ends

ここで変位についてはその食い違いを許さないで両方の梁に対し等しい値 y_c とし、回転角に関しては食い違いを考え各々 θ_{c1} 、 θ_{c2} としている。回転角の食い違いについては、回転バネのコンプライアンス $\Delta\lambda$ を用い、 M_c との間に次の関係が成り立つ。

$$\theta_{c2} - \theta_{c1} = -2\Delta\lambda \cdot M_c \quad (14)$$

式(12)~(14)は5個の未知変数 F_c 、 M_c 、 y_c 、 θ_{c1} 、 θ_{c2} を含み一次方程式が5個あるので一般に解くことが可能である。具体的には、

$$\mathbf{F}_{cg} = \mathbf{C}_g^{-1} \times \mathbf{B}_g \times \mathbf{P}_{ABg} \quad (15)$$

ここに、添字 g は一般式を表すものとし、

$$\mathbf{F}_{cg} = [F_c \quad M_c \quad y_c \quad \theta_{c1} \quad \theta_{c2}]^T \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_g = \begin{bmatrix} \lambda_{yp}^*(h_1, 0) & \lambda_{ym}^*(h_1, 0) & -1 & 0 & 0 \\ \lambda_{gp}^*(h_1, 0) & \lambda_{gm}^*(h_1, 0) & 0 & -1 & 0 \\ -\lambda_{yp}^*(0, h_2) & \lambda_{ym}^*(0, h_2) & -1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{gp}^*(0, h_2) & \lambda_{gm}^*(0, h_2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2\Delta\lambda & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} -\lambda_{yp}^*(h_1, 0) & -\lambda_{ym}^*(h_1, 0) & 0 & 0 \\ -\lambda_{gp}^*(h_1, 0) & -\lambda_{gm}^*(h_1, 0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{yp}^*(0, h_2) & -\lambda_{ym}^*(0, h_2) \\ 0 & 0 & -\lambda_{gp}^*(0, h_2) & -\lambda_{gm}^*(0, h_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{ABg} = [P_1 \quad M_1 \quad P_2 \quad M_2]^T \quad (19)$$

3.2 K値評価 式(15)~(19)により、回転バネ部のモーメント M_c を求めることができれば、無限長片側き裂梁の純曲げ下のK値計算式にモーメント M_c を適用することより、所用のK値 K_M を求めることができる。

$$K_M = \frac{M_c}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi = a/W) \quad (20)$$

ここに、 $Z = W^2/6$ 、 F_M は純曲げ下K値評価式における有限幅の補正係数である。

4. 有限要素解との比較

ここでは両端に等しい曲げ荷重が働く場合につき導いた手法にてK値を求め、これを有限要素解と比較することによりその精度の確認を行う。

具体的には、 H/W 、 h_1/H をパラメータとして円筒の両端に等しい曲げ荷重をかける軸対称有限要素解析を行い、変位法によってK値を評価した。円筒半径肉厚比 $R_m/W = 10.5$ 、材料定数はヤング率 $E = 206 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu =$

0.3 とした。この解析結果 K_{FEM} と式(20)による結果 K_M を次式にて定義する K_{Mbeam} で基準化し図8に比較した。

$$K_{Mbeam} = \frac{M}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \quad (21)$$

K_{Mbeam} は曲げ荷重 M を受ける無限長片側き裂梁の純曲げ下K値である。

この図より、同じ R_m/W の円筒に対し、

1. 梁理論に基づくため、 h_1 、 h_2 、 H に比べ W が小さい程良好な精度が期待できると考えられるが、 $h_2 = W$ となっている $H/W = 4$ 、 $h_1/H = 0.75$ の場合でも理論解は有限要素解析とほぼ一致するものになっており、式(20)の簡易評価式は h_1/W 、 h_2/W が1程度以上であれば実用上十分な精度をもってK値を与えるものと判断される。
 2. 円筒が長くなると所用のK値 K_M は小さくなる。
 3. き裂位置が円筒中央から端部に偏るに従い、 K_M は大きくなる。
 4. 以上より、両端に軸対称曲げ荷重を受ける円筒環状き裂のK値を評価する際に、円筒長さ、およびき裂の軸方向位置を適切に考慮に入れる必要がある。
- ことがわかる。

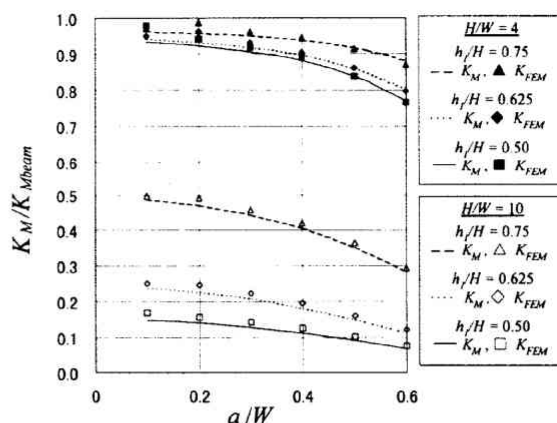


Fig. 8 Comparison of K from theory with that from FEM

なお有限幅の補正係数 F_M 、また、純曲げを受ける無限長梁において、き裂が入ることによるコンプライアンスの増分として与えられるバネのコンプライアンス $\Delta\lambda$ については具体的に与えられたいくつかの式があるが、ここではそれぞれ次の式(22)⁽¹⁾、(23)⁽⁷⁾を用いて評価している。

$$F_M(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2}} \cdot \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^4}{\cos(\pi\xi/2)} \quad (22)$$

$$\Delta\lambda(\xi) = \frac{\pi(1.1215)^2}{2E} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)^2} \times \{1 + \xi(1-\xi)(0.44 + 0.25\xi)\} \left(\frac{6}{W}\right)^2 \quad (23)$$

5. 結 言

本論文では端部に軸対称荷重を受ける有限長円筒の内表面環状き裂のK値について検討した。き裂位置については軸方向任意位置とし、円筒の長さ、き裂の軸方向位置の影響を含んだ形での実用上十分な精度を有すると思われるK値簡易評価法を理論的に導いた。その後この手法を用いて、両端に等しい軸対称曲げ荷重を受ける円筒の任意位置環状き裂のK値簡易評価を行い、これを有限要素解と比較することにより精度を確認した。

得られた結果によれば、円筒が長くなると両端に等しい曲げ荷重を受ける円筒環状き裂のK値 K_M は小さくなること、また、き裂位置が円筒中央から端部に偏るにしたがい、 K_M は大きくなることがわかった。

以上より、両端に軸対称荷重を受ける円筒環状き裂のK値評価にあたっては、円筒長さ、およびき裂の軸方向位置を考慮に入れる必要があり、本研究で示した簡易評価法は

実用的観点からこのニーズに十分応えうるものであると思われる。

文 献

- (1) 例えば、Murakami, Y. et al., Stress Intensity Factors Handbook, (1987), Pergamon Press.
- (2) 飯井俊行・渡邊勝彦、環状き裂を有する円筒の一次元温度分布下応力拡大係数簡易評価式、機論、63-610、A(1997)、1205-1212.
- (3) Timoshenko, S. P., Strength of Materials, Part II, 2nd Printing(1934), Chap. I, D. Van Nostrand Company.
- (4) Okamura, H., Watanabe, K. and Takano, T., Application of the Compliance Concept in Fracture Mechanics, ASTM STP 536, (1973), 423-438.
- (5) Okamura, H., Watanabe, K. and Naito, Y., Some Crack Problems in Structural Reliability Analysis, Reliability Approach in Structural Engineering, (1975), 243-257, Maruzen.
- (6) Hetényi, M., Beams on Elastic Foundation, 2nd Edition (1971), The University of Michigan Press.
- (7) 高橋淳、エネルギー原理に基づく構造物の線形および非線形破壊力学解析に関する研究、(1991)、東京大学学位論文。